

Teoretická část - 21.12.2021

1. (a) Definujte Gâteauxovu derivaci ve směru a stacionární bod funkcionálu (2 body).
- (b) Zformulujte základní lemma variačního počtu a větu o Euler-Lagrangeově rovnici (2 body).
- (c) Větu o Euler-Lagrangeově rovnici dokažte (2 body).
- (d) Uvažme Banachův prostor $X = C([1, 5])$ (s obvyklou maximovou normou) a funkcionály $F, G, H : X \rightarrow \mathbb{R}$ definované pro $f \in X$ jako $F(f) = f(1)$ a $G(f) = f(5)$ a $H(f) = F(f)G(f)$.
 - i. Pro $h \in X \setminus \{0\}$ spočtěte $D_h(F)$ a $D_h(G)$.
 - ii. Rozhodněte, zda pro $h \in X \setminus \{0\}$ platí

$$D_h(H) = F \cdot D_h(G) + D_h(F) \cdot G.$$

Vše řádně zdůvodněte (2 body).

2. (a) Definujte bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci (2 body).
- (b) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení pro
- $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ posloupnosti reálných funkcí definovaných na $(-3, 4)$ a
 - funkce $a, b : (-3, 4) \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $a_n \rightarrow a$ a $b_n \rightarrow b$ na $(-3, 4)$:
- i. pokud $a_n \rightrightarrows a$ na $(-3, 4)$, potom $a_n \overset{loc}{\rightrightarrows} a$ na $(-3, 4)$,
 - ii. pokud $a_n \overset{loc}{\rightrightarrows} a$ na $(-3, 4)$, potom $a_n \rightrightarrows a$ na $(-3, 4)$,
 - iii. pokud $a_n \rightrightarrows a$ na $(-3, 1)$ a $a_n \rightrightarrows a$ na $(1, 4)$, potom $a_n \rightrightarrows a$ na $(-3, 4)$,
 - iv. pokud $a_n \overset{loc}{\rightrightarrows} a$ na $(-3, 1)$ a $a_n \overset{loc}{\rightrightarrows} a$ na $(1, 4)$, potom $a_n \overset{loc}{\rightrightarrows} a$ na $(-3, 4)$,
 - v. pokud $a_n \rightrightarrows a$ na $(-3, 4)$ a $b_n \rightrightarrows b$ na $(-3, 4)$, potom $a_n + b_n \rightrightarrows a + b$ na $(-3, 4)$,
 - vi. pokud $a_n \rightrightarrows a$ na $(-3, 4)$ a $b_n \rightrightarrows b$ na $(-3, 4)$, potom $a_n b_n \rightrightarrows ab$ na $(-3, 4)$,
 - vii. pokud $a_n \rightrightarrows a$ na $(-3, 4)$ a $|b_n| \leq a_n$ na $(-3, 4)$, $n \in \mathbb{N}$, potom $b_n \rightrightarrows b$ na $(-3, 4)$.
- Vše řádně zdůvodněte (6 bodů).

3. (a) Definujte σ -algebru a míru (2 body).
(b) Zformulujte větu o limitě integrálu závislého na parametru a větu o derivaci integrálu závislého na parametru (3 body).
(c) Větu o derivaci integrálu závislého na parametru dokažte (2 body).
(d) Uvažme následující systém podmnožin \mathbb{N} :

$$\Sigma = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ je konečná, nebo } \mathbb{N} \setminus A \text{ je konečná}\}.$$

Je (\mathbb{N}, Σ) měřitelný prostor? Vše řádně zdůvodněte (1 bod).